פרק ו': עצי אמת ומשפט הקומפקטיות – שינויים והערות

נביא כאן הוכחה חלופית של משפט הקומפקטיות שאינה משתמשת בעץ האמת. ההוכחה היא פשוטה יותר למקרה הפרטי בו השפה בת מניה וקשה יותר במקרה הכללי.

6.41 הגדרה. קבוצת פסוקים Γ נקראת **דעתנית** אם לכל פסוק ϕ קיים $\phi \in \Gamma$ או $\neg\phi \in \Gamma$.
Γ נקראת **דעתנית לפסוקים היסודיים** אם לכל פסוק יסודי P קיים $P \in \Gamma$ או $\neg P \in \Gamma$.

תחילה נוכיח את משפט הקומפקטיות לקבוצה Γ דעתנית לפסוקים היסודיים.

6.42 למה. משפט הקומפקטיות מתקיים לכל קבוצת פסוקים Γ שהיא דעתנית לפסוקים היסודיים.

הוכחה. מכיוון ש-Γ עיקבית מקומית היא אינה מכילה פסוק ושלילתו, ולכן לכל פסוק יסודי P היא מכילה בדיוק אחד מבין הפסוקים P ו-$\neg P$.

נגדיר מבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ע"י שנקבע, לכל פסוק יסודי P:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(P) = \begin{cases} T & P \in \Gamma \text{ אם} \\ F & P \notin \Gamma \text{ אם} \end{cases}$$

נוכיח עתה כי לכל פסוק $\phi \in \Gamma$ קיים $\boldsymbol{\mathcal{A}} \models \phi$.
יהי $\phi \in \Gamma$ ויהיו $P_1, \ldots, P_n$ הפסוקים היסודיים המופיעים ב-ϕ. כפי שעשינו כבר קודם לכן, לפסוק ψ כלשהו אנו מסמנים ב-$\psi^{(T)}$ את ψ וב-$\psi^{(F)}$ את $\neg\psi$. לכל $1 \le i \le n$ יהי $j_i = \boldsymbol{\mathcal{A}}(P_i)$. לפי הגדרת $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, אם $P_i \in \Gamma$ אז $j_i = \boldsymbol{\mathcal{A}}(P_i) = T$ וקיים $P_i^{(j_i)} = P_i \in \Gamma$, ואם $P_i \notin \Gamma$ אז $j_i = \boldsymbol{\mathcal{A}}(P_i) = F$ וקיים $P_i^{(j_i)} = \neg P_i \in \Gamma$. כך בכל מקרה $P_i^{(j_i)} \in \Gamma$. קבוצת הפסוקים $\Delta = \{P_1^{(j_1)}, \ldots, P_n^{(j_n)}, \phi\}$ היא, אם כן, קבוצה סופית חלקית ל-Γ, ומכיוון ש-Γ עיקבית מקומית Δ עיקבית, ויש לה מודל $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. לכל $1 \le i \le n$ קיים $\boldsymbol{\mathcal{B}}(P_i^{(j_i)}) = T$ ולכן $B(P_i) = j_i = \boldsymbol{\mathcal{A}}(P_i)$. כך המבנים $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ו-$\boldsymbol{\mathcal{B}}$ מקבלים את אותם הערכים על כל הפסוקים היסודיים המופיעים ב-ϕ ולכן $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi) = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\phi) = T$, וזה מה שהיה עלינו להוכיח.

כדי להוכיח את משפט הקומפקטיות לקבוצה Γ כלשהיא, לאו דווקא דעתנית לפסוקים היסודיים, עלינו להראות שאפשר להרחיב את Γ לקבוצה Γ^* דעתנית לפסוקים היסודיים מבלי לפגוע בעיקביות המקומית. כדי שההוכחה הנוכחית תוכל לשמש דגם להוכחת משפט הקומפקטיות גם לתחשיב היחסים נוכיח את הטענה החזקה יותר והיא שאפשר להרחיב את Γ לקבוצה Γ^* דעתנית מבלי לפגוע בעיקביות המקומית. כדי לעבור מ-Γ ל-Γ^* נצטרך, לכל פסוק ϕ, להוסיף ל-Γ את ϕ או את $\neg\phi$, אלא אם אחד משניהם כבר נמצא ב-Γ. תחילה נוכיח את למת ההוספה המראה שאפשר לעשות צעד בודד בכוון זה, ואחריה נוכיח את למת האיחוד המראה שאפשר לאחד את כל קבוצות הפסוקים הנבנות בצעדים השונים לקבוצה אחת כנדרש.

6.43 למת ההוספה. לכל קבוצת פסוקים Δ עיקבית מקומית, ולכל פסוק ϕ, לפחות אחת הקבוצות $\Delta \cup \{\phi\}$ ו- $\Delta \cup \{\neg\phi\}$ היא עיקבית מקומית.

הוכחה. נניח ששתי קבוצות אלו אינן עיקביות מקומית. מכיוון ש- $\Delta \cup \{\phi\}$ אינה עקבית מקומית יש לה תת קבוצה Σ סופית שאינה עיקבית. אנו רשאים להניח כי Σ מכילה את ϕ כי אחרת אנו יכולים להוסיף ל-Σ את ϕ והוספה זאת לא תשנה את אי העקביות של Σ, כי קבוצת פסוקים המקיפה קבוצה לא עקבית גם היא לא עקבית. לכן Σ היא בעלת הצורה $\{\psi_1, \ldots, \psi_n, \phi\}$, היכן ש- $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Delta$. בדיוק באותו אופן אנו רואים כי מכיוון ש- $\Delta \cup \{\neg\phi\}$ אינה עיקבית אז קיימת קבוצה $\{\chi_1, \ldots, \chi_m, \neg\phi\}$ שאינה עיקבית, כאשר $\chi_1, \ldots, \chi_m \in \Delta$. קיים אם כן $\Delta \supseteq \{\psi_1, \ldots, \psi_n, \chi_1, \ldots, \chi_m\}$ ומכיוון ש-Δ עיקבית מקומית קבוצה זאת היא עיקבית. יהי $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ מודל שלה. נבחין ביו שני מקרים. מקרה א': $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\phi) = T$, ואז כל פסוקי הקבוצה $\{\psi_1, \ldots, \psi_n, \phi\}$ אמיתיים ב-$\boldsymbol{\mathcal{B}}$, בניגוד לכך שקבוצה זאת אינה עיקבית. מקרה ב': $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\phi) = F$, ואז כל פסוקי הקבוצה $\{\chi_1, \ldots, \chi_n, \neg\phi\}$ אמיתיים ב-$\boldsymbol{\mathcal{B}}$, בניגוד לכך שקבוצה זאת אינה עיקבית. כך הגענו לסתירה מן ההנחה שאף אחת מן הקבוצות $\Delta \cup \{\phi\}$ ו- $\Delta \cup \{\neg\phi\}$ אינה עיקבית מקומית.

6.44 למת האיחוד. נביא למה זאת בשתי גרסאות. הראשונה מספיקה להוכחת משפט הקומפקטיות לשפה בת מניה והשניה כללית יותר ודרושה להוכחת משפט הקומפקטיות לשפה כללית.

א. תהי $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ סידרת קבוצות פסוקים שכל אחת מהן עיקבית מקומית וכך ש- $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ עבור $i < j$. אז גם $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ עיקבית מקומית.

ב. תהי W קבוצה של קבוצות פסוקים עיקביות מקומית שהיא סדורה ע"י ההקפה, כלומר שלכל $\Gamma, \Delta \in W$ קיים $\Delta \subseteq \Gamma$ או $\Gamma \subseteq \Delta$. אז גם קבוצת האיחוד $\bigcup W = \bigcup_{G \in W} \Gamma$ של איברי W היא עיקבית מקומית.

הוכחה. א. תהי $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ קבוצה סופית החלקית ל- $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$. לכל $1 \leq i \leq n$ קיים m_i כך ש- $\psi_i \in \Gamma_{m_i}$. יהי k המספר הגדול מבין $m_1, \ldots, m_n$ ואז לכל $1 \leq i \leq n$ קיים $\Gamma_{m_i} \subseteq \Gamma_k$ ולכן $\psi_i \in \Gamma_k$. כך ראינו כי $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma_k$, ומכיוון ש-$\Gamma_k$ עיקבית מקומית $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ עיקבית.

ב. תהי $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ קבוצה סופית החלקית ל- $\bigcup W$. לכל $1 \leq i \leq n$ קיים $\Gamma_i \in W$ כך ש- $\psi_i \in \Gamma_i$. היות ו-W סדורה לגמרי ע"י יחס ההקפה קיימת קבוצה Γ_k מירבית מבין $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, כלומר $\Gamma_i \subseteq \Gamma_k$ לכל $1 \leq i \leq n$. היות ולכל $1 \leq i \leq n$ קיים $\psi_i \in \Gamma_i \subseteq \Gamma_k$ לכן $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma_k$. היות ו- $\Gamma_k \in W$ היא עיקבית מקומית לכן הקבוצה $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ היא עיקבית, ובכך הוכחנו כי $\bigcup W$ היא עיקבית מקומית.

6.45 למת הדעתנות. כל קבוצת פסוקים עיקבית מקומית Γ ניתנת להרחבה לקבוצת פסוקים Γ^* עיקבית מקומית דעתנית.

הוכחת למת הדעתנות לשפה בת מניה. בשפה בת מניה קבוצת הפסוקים היא בת מנייה, ולכן ניתן להציג את כל הפסוקים של השפה בסידרה $\phi_1, \phi_2, \ldots$. נגדיר ברקורסיה $\Gamma_0 = \Gamma$, ועבור $n > 0$

$$\Gamma_n = \begin{cases} \Gamma_{n-1} \cup \{\phi_n\} & \text{אם } \Gamma_{n-1} \cup \{\phi_n\} \text{ עיקבית מקומית} \\ \Gamma_{n-1} \cup \{\neg\phi_n\} & \text{אחרת} \end{cases}$$

ברור עתה כי לכל n $\phi_n \in \Gamma_n$ או $\neg\phi_n \in \Gamma_n$ ו- $\Gamma_{n-1} \subseteq \Gamma_n$, ולכן לכל m, n אם $m \leq n$ אז $\Gamma_m \subseteq \Gamma_n$. נוכיח עתה, באינדוקציה על n, כי Γ_n עיקבית מקומית. Γ_0 עיקבית מקומית כי לפי הנחתנו Γ עיקבית מקומית. אם Γ_{n-1} עיקבית מקומית אז אם $\Gamma_{n-1} \cup \{\phi_n\}$ עיקבית מקומית, אז Γ_n היא קבוצה זאת והיא עקבית מקומית, ואם $\Gamma_{n-1} \cup \{\phi_n\}$ אינה עיקבית מקומית, אז לפי למת ההוספה הקבוצה $\Gamma_{n-1} \cup \{\neg\phi_n\}$ היא עיקבית מקומית, ולפי הגדרת Γ_n קבוצה זאת היא Γ_n.

כעת תהי $\Gamma^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$. $\Gamma^* \supseteq \Gamma_0 = \Gamma$. ברור כי לכל n קיים, לפי הגדרת Γ_{n+1} $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$. לכן לכל $m > n$ קיים $\Gamma_m \supseteq \Gamma_n$. היות וכל קבוצה Γ_n היא עיקבית מקומית לכן, לפי למת האיחוד, גם האיחוד Γ^* הוא עיקבי מקומית. לכל n $\phi_n \in \Gamma_n$ או $\neg\phi_n \in \Gamma_n$ ומכיוון ש- $\Gamma_n \subseteq \Gamma^*$ לכן $\phi_n \in \Gamma^*$ או $\neg\phi_n \in \Gamma^*$, ו- Γ^* דעתנית.

להוכחת המקרה הכללי של למת הדעתנות אנו זקוקים ללמה של צורן שהיא משפט מרכזי בתורת הקבוצות שנביא אותו כאן, בניסוח המתאים לצרכינו, אבל לא נוכיח אותו כאן.

6.46 הלמה של צורן (Zorn's lemma). נתחיל בהגדרת מספר מונחים הנוגעים לקבוצה W של קבוצות. C נקראת חסם מלעיל של W אם לכל $A \in W$ $A \subseteq C$. D נקרא איבר מירבי של W אם $D \in W$ ולכל $A \in W$ אם $A \supseteq D$ אז $A = D$.

טענת הלמה: תהי W קבוצה לא ריקה של קבוצות כך שלכל קבוצה U לא ריקה החלקית ל-W והסדורה ע"י יחס ההקפה $\subseteq$ יש חסם מלעיל ב-W. אז קיים ב-W איבר מירבי D.

6.47 דוגמאות למונחים המופיעים בניסוח הלמה של צורן. א. תהי W קבוצת כל הקטעים הפתוחים של מספרים ממשיים $(0, x) = \{z \mid 0 < z < x\}$ והחצי-סגורים $(0, x] = \{z \mid 0 < z \leq x\}$ כאשר $x > 0$. כפי שקל לראות קבוצה זאת סדורה לגמרי ע"י יחס ההקפה $\subseteq$.

ב. תהי W קבוצת כל הקטעים הפתוחים $(0, x)$ והסגורים $[0, x]$ כאשר $x > 0$. קבוצה זאת אינה סדורה לגמרי ע"י יחס ההקפה כי אף אחת משתי הקבוצות $(0, 2)$ ו- $[0, 1]$ השייכות ל-W אינה מקיפה את השניה.

ג. תהי W קבוצת כל הקטעים החצי פתוחים $[a, b)$ ו-$(a, b]$ כך ש- $0 < b - a \leq 1$. האיברים המירביים של W הם כל הקטעים $[a, a+1)$ ו- $(a, a+1]$.

לקבוצה W יכולים להיות איברים מירביים רבים, ויתכן גם שלא יהיה לה אף איבר מירבי. למשל, האיברים המירביים של הקבוצה $W = \{\{0\},\{1\},\{0,1\},\{0,2\}\}$ הם $\{0,1\}$ ו- $\{0,2\}$. אם W קבוצה שאיבריה זרים בזוגות אז כל האיברים הלא-ריקים של W הם איברים מירביים של W. לעומת זאת, לקבוצה W של כל הקבוצות הסופיות של מספרים טבעיים אין איבר מירבי.

המשך הוכחת למת הדעתנות: תהי W קבוצת כל קבוצות הפסוקים Δ ב-L המקיפות את Γ ושהן עקביות מקומית. נראה כי W ממלאת אחרי תנאי הלמה של צורן. W אינה ריקה כי $\Gamma \in W$. נראה עתה כי אם $W \supseteq U \neq \emptyset$ ו-U סדורה לגמרי ע"י $\subseteq$ אז גם $\bigcup U \in W$, וברור כי $\bigcup U$ הוא חסם מלעיל של U. היות ו-U אינה ריקה וכל איבר שלה מקיף את Γ לכן גם $\Gamma \subseteq \bigcup U$. לפי למת האיחוד $\bigcup U$ עיקבית מקומית. כך $\bigcup U$ ממלאת אחר כל תנאי השייכות ל-W ולכן $\bigcup U \in W$. בכך הוכחנו כי W מקיימת אחרי תנאי הלמה של צורן. לכן, לפי הלמה של צורן, יש ב-W איבר מירבי Δ. נראה כי Δ קבוצת פסוקים דעתנית. לפי למת ההוספה, לכל פסוק ϕ של L אחת הקבוצות $\Delta \cup \{\phi\}$ ו- $\Delta \cup \{\neg\phi\}$ היא עיקבית מקומית, ולכן גם היא ב-W. מכיוון ש-Δ קבוצה מירבית ב-W קיים $\Delta = \Delta \cup \{\phi\}$ או $\Delta = \Delta \cup \{\neg\phi\}$, ולכן $\phi \in \Delta$ או $\neg\phi \in \Delta$, ו-Δ קבוצה דעתנית עיקבית מקומית המקיפה את Γ כנדרש.

6.48 הוכחת משפט הקומפקטיות. תהי Γ קבוצת פסוקים עיקבית מקומית. לפי למת הדעתנות Γ ניתנת להרחבה לקבוצה Γ^* עיקבית מקומית ודעתנית. לפי למה 6.42 Γ^* היא עיקבית, ולכן גם תת-הקבוצה Γ שלה היא עיקבית.